



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 11.02.2022
CLASA a VII - a

Problema 1

Fie $x = (1 + \sqrt{2})^2$ și $y = \sqrt{17 - 12\sqrt{2}}$.

a) Determinați diferența dintre media aritmetică și media geometrică a celor două numere;

b) Dacă $z = x^{-1} + y^{-1}$, demonstrați că $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{35 \cdot 36} = 35 \cdot z^{-2}$.

Problema 2

a) Fie $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{3a+4b}{4a+3b} = \frac{87}{88}$ și $\frac{2b+3c}{3b+2c} = \frac{39}{46}$. Demonstrați că $b^2 + c^2 = a^2$.

b) Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2023}$. Arătați că $\sqrt{\left(\frac{a}{7} - 289\right)\left(\frac{b}{7} - 289\right)}$ este pătrat perfect.

Problema 3

Fie E un punct pe latura DC a pătratului ABCD, [AN bisectoarea unghiului $\angle EAB$, $N \in BC$ și $AE \cap BC = \{P\}$. Perpendiculara din P pe NE intersectează dreapta DC în M. Demonstrați că:

a) [NA este bisectoarea unghiului $\angle MNB$;

b) $MN = DM + BN$;

c) $\angle MAN = 45^\circ$.

G.M. 2022

Problema 4

Punctul O este intersecția mediatoarelor laturilor triunghiului ABC. Dreapta AO intersectează latura BC în punctul D și $OD = DB = \frac{CD}{2}$.

a) Arătați că $\triangle DOC$ este dreptunghic;

b) Aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.